

GENEL FİZİK LABORATUVAR KILAVUZU

(Fizik I – Fizik II)

DeneySEL FİZİĞE GİRİŞ

Ölçüm, Hatalar ve Veri Analizi

Fizik Bölümü
Karabük Üniversitesi

Hazırlayanlar:
Dr. Ulvi KANBUR
Prof. Dr. Necla ÇAKMAK

Şubat 2026

Contents

1 Giriş	2
1.1 Fiziksel Büyüklükler ve Ölçüm	2
1.2 Ölçüm Aletleri ve Hassasiyet	3
2 Hatalar ve Belirsizlik	4
2.1 Sistematik Hatalar	4
2.2 Rastgele (İstatistiksel) Hatalar	5
2.3 Ölçümlerde Belirsizlik	5
2.4 Anlamlı Rakamlar (Basamaklar)	6
3 Belirsizliğin Ötellenmesi (Yayılması)	7
3.1 Genel Formül	8
3.2 Toplama ve Çıkarma	8
3.3 Çarpma ve Bölme	8
3.4 Üsler ve Üslerin Çarpımı	8
3.5 Örnek: Basit Sarkaç	9
3.6 Karekök ve Logaritmik Fonksiyonlar	9
4 Tekrarlı Ölçümler, Ortalama Değer ve İstatistiksel Belirsizlik	10
4.1 En İyi Tahmin Olarak Ortalama Değer	11
4.2 Ölçümlerin Dağılması ve Hassasiyet	11
4.3 En İyi Tahmin Olarak Ağırlıklı Ortalama	12
4.4 Örnek: Direnç Ölçümlerinin Ağırlıklı Ortalaması	13
5 Verilerin Gösterimi ve Grafikler	13
5.1 Örnek: Bir Grafikle Doğrusal Bir Yasanın Testi (Ohm Yasası)	14
5.2 Örnek: Basit Sarkacın Doğrusallaştırılması	15
6 Milimetrik Kağıtta Grafik Çizimi	17
6.1 Milimetrik Kağıt ve Ölçek	17
6.2 Bir Veri Noktasının Yerleştirilmesi	17
6.3 Genel Notlar	18
7 En Küçük Kareler Yöntemi ve Fit Parametrelerin Belirsizliği	19

1. Giriş

1.1. Fiziksel Büyüklükler ve Ölçüm

Fizik deneysel bir bilimdir ve deneyler fiziksel büyüklüklerin ölçülmesine dayanır. **Fiziksel büyüklük**, bir fiziksel sistemin ölçülebilen ve sayısal olarak ifade edilebilen herhangi bir özelliğidir. Örnekler arasında uzunluk, kütle, zaman, sıcaklık, elektrik akımı ve gerilim yer alır. Laboratuvar çalışmalarında bu büyüklükler uygun ölçüm aletleri kullanılarak ölçülür ve birimleriyle birlikte rapor edilir.

Bir **ölçüm**, bilinmeyen bir büyüklüğün standart bir birimle karşılaştırılmasından oluşur. Tüm ölçüm aletlerinin sınırlı bir hassasiyeti olduğundan, hiçbir ölçüm mükemmel derecede kesin olamaz. Bu nedenle, her ölçüm değeri bir belirsizlik ile birlikte verilir. Bir ölçümün neyi temsil ettiğini, nasıl ifade edildiğini ve belirsizliğinin nasıl ortaya çıktığını anlamak, deneysel fiziğin temel bir parçasıdır.

Bu laboratuvar dersinde, standart birimleri kullanmaya, ölçümleri dikkatle yapmaya ve ölçülen değerleri doğru yorumlamaya vurgu yapılır. Amaç yalnızca sayısal sonuçlar elde etmek değil, aynı zamanda bu sonuçların fiziksel anlamını ve sınırlamalarını anlamaktır. Doğru ölçüm teknikleri; veri analizi, grafiksel gösterim ve kuramsal öngörülerle karşılaştırma için temel oluşturur.

Fiziksel Büyüklükler

Fiziksel büyüklük, bir fiziksel sistemin ölçülebilen bir özelliğidir. Sayısal bir değer ile birim birlikte ifade edilir ve genellikle ölçüm sürecinden kaynaklanan bir belirsizlik ile ilişkilidir. Örneğin, bir çubuğun uzunluğu (2.35 ± 0.01) m olarak, bir olayın zaman aralığı ise (4.2 ± 0.1) s olarak ölçülebilir.

Fiziksel büyüklükler temel veya türetilmiş olarak sınıflandırılabilir. Uzunluk, kütle ve zaman gibi temel büyüklükler bağımsız olarak tanımlanır. Türetilmiş büyüklükler ise fiziksel bağıntılar aracılığıyla temel büyüklükler cinsinden tanımlanır. Pratik olarak, türetilmiş büyüklükler, ölçülen temel büyüklüklerden hesap yoluyla elde edilebileceği gibi, uygun şekilde kalibre edilmiş aletlerle doğrudan da ölçülebilir.

Laboratuvar deneylerinde, ilgili fiziksel büyüklükleri belirlemek ve bunları birimleri ve belirsizlikleri ile birlikte doğru ifade etmek, anlamlı bir veri analizi için gerekli ilk adımdır.

SI Birimleri

Deneyisel fizikte ölçümler, fiziksel büyüklüklerin ifade edilmesi için tutarlı ve evrensel olarak kabul görmüş bir çerçeve sağlayan Uluslararası Birim Sistemi (SI) kullanılarak rapor edilir. SI birimlerinin kullanımı, deney sonuçlarının açıkça iletilmesini ve farklı deneyler ile laboratuvarlar arasında karşılaştırılabilmesini sağlar.

SI sistemi; uzunluk için metre (m), kütle için kilogram (kg), zaman için saniye (s), elektrik akımı için amper (A) ve sıcaklık için kelvin (K) gibi bir dizi temel birime dayanır. Diğer fiziksel büyüklükler bu temel birimlerden türetilen birimlerle ifade edilir. Örneğin hız metre/saniye (m/s), kuvvet newton (N) cinsinden ifade edilir.

Bu laboratuvar dersinde, aksi belirtilmedikçe tüm ölçülen ve hesaplanan büyüklükler SI birimleriyle ifade edilmelidir. Gerekli durumlarda, başka birim sistemlerinde elde edilen ölçümler, daha ileri analizden önce SI birimlerine dönüştürülmelidir.

Table 1: SI temel fiziksel büyüklükleri ve temel birimleri

Fiziksel Büyüklük	SI Birimi	Birim Sembolü
Uzunluk	metre	m
Kütle	kilogram	kg
Zaman	saniye	s
Elektrik akımı	amper	A
Termodinamik sıcaklık	kelvin	K
Madde miktarı	mol	mol
Işık şiddeti	kandela	cd

Tablo 2, elektromanyetik fiziksel büyüklükleri, sembollerini ve karşılık gelen SI birimlerini sunmaktadır. Tablo 3, elektromanyetizmada kullanılan temel fiziksel sabitleri özetlemektedir. Listelenen sabitler; temel yük, elektron, proton ve nötronun durgun kütleleri ile boşluğun elektriksel geçirgenliği ve manyetik geçirgenliğini içerir. Bu sabitler; elektrik

Table 2: Elektromanyetik Fiziksel Büyüklüklerin Sembolleri ve SI Birimleri

Büyüklük	Sembol	SI Birimi
Kütle	m	kg
Elektrik yükü	q veya e	C
Doğrusal yük yoğunluğu	λ	C/m
Yüzey yük yoğunluğu	σ	C/m ²
Hacim yük yoğunluğu	ρ	C/m ³
Gerilim (potansiyel farkı)	V	V
Elektrik akımı	I	A
Akım yoğunluğu	$\vec{J}$	A/m ²
Direnç	R	Ω
İletkenlik	σ	1/(Ωm)
Kapasitans	C	F
Dielektrik sabiti	κ	–
Elektrik alan	$\vec{E}$	V/m
Elektrik akısı	Φ	V·m
Elektromotor kuvvet	ε	V
Elektrik dipol momentı	$\vec{p}$	C·m
Manyetik alan	$\vec{B}$	T
Manyetik akı	Φ_m	Wb
Manyetik dipol momentı	$\vec{\mu}$	N·m/T
Boşluğun manyetik geçirgenliği	μ_0	N/A ²
Boşluğun elektriksel geçirgenliği	ε_0	C ² /(N·m ²)
Enerji	E, U, K	J
Kuvvet	F	N
Frekans	f	Hz
Güç	P	W

ve manyetik alanların anlaşılması, elektromanyetik dalgalar ve Maxwell denklemlerinin formülasyonu için temel öneme sahiptir.

Table 3: Temel Fiziksel Sabitler

Sabit	Değer
Temel yük, e	$1.60217733 \times 10^{-19}$ C
Elektronun durgun kütlesi	$9.1093897 \times 10^{-31}$ kg
Protonun durgun kütlesi	$1.6726231 \times 10^{-27}$ kg
Nötronun durgun kütlesi	$1.6749286 \times 10^{-27}$ kg
Boşluğun manyetik geçirgenliği, μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$ T ² m ³ /J
Boşluğun elektriksel geçirgenliği, ε_0	$8.854187817 \times 10^{-12}$ C ² /(J m)

Türetilmiş Büyüklükler

Türetilmiş büyüklükler, temel büyüklükler cinsinden fiziksel bağıntılar aracılığıyla tanımlanan fiziksel büyüklüklerdir. Laboratuvar deneylerinde ve fiziksel olaylarda karşılaşılan birçok önemli özelliği tanımlarlar.

Türetilmiş büyüklüklere örnek olarak hız, ivme, kuvvet, enerji ve elektrik potansiyel farkı verilebilir. Bu büyüklükler, SI temel birimlerinin birleşimlerinden oluşan birimlerle ifade edilir. Örneğin hız metre/saniye (m/s), kuvvet newton (N) ve enerji joule (J) cinsinden ifade edilir.

Örnek olarak hızın ölçümünü ele alalım. Bir cismin aldığı yol metre çubuğu ile ve geçen süre kronometre ile ölçülürse, hız bu iki ölçülen büyüklükten hesaplanır. Dolayısıyla hızın elde edilen değeri hem yol hem de zaman ölçümlerine bağlıdır. Yol veya zaman ölçümlerindeki herhangi bir belirsizlik, hesaplanan hızın belirsizliğine katkıda bulunur.

Genel olarak, türetilmiş büyüklükler bir veya birden fazla ölçülen büyüklüğe bağlı olduğundan, belirsizlikleri de doğrudan ölçümden veya hesaplamadan elde edilen büyüklüklerin belirsizliklerinden kaynaklanır. Bu belirsizliklerin doğru şekilde dikkate alınması, anlamlı veri analizi ve kuramsal öngörülerle güvenilir karşılaştırma için gereklidir.

1.2. Ölçüm Aletleri ve Hassasiyet

DeneySEL ölçümler, belirli fiziksel büyüklükleri ölçmek üzere tasarlanmış aletler kullanılarak gerçekleştirilir. Fizik laboratuvarlarında yaygın olarak kullanılan ölçüm aletleri arasında uzunluk için cetvel ve metre çubuğu, zaman için kronometre,

kütle için terazi, sıcaklık için termometre ve akım ile gerilim için elektrik ölçerler bulunur. Her alet yalnızca belirli ölçüm türleri için ve sınırlı bir aralıkta uygundur.

Tüm ölçüm aletlerinin sonlu bir hassasiyeti vardır ve bu, bir büyüklüğün ne kadar doğru ölçülebileceğini sınırlar. Hassasiyet, aletin tasarımına bağlıdır ve çoğu zaman en küçük ölçek bölümü veya dijital göstergedeki en küçük artış ile ilişkilidir. Örneğin milimetre işaretli bir cetvel, bir milimetreden daha küçük uzunluk farklarını güvenilir biçimde ölçemez ve iki ondalık basamak gösteren bir dijital kronometre, gösterim çözünürlüğünden daha küçük zaman aralıklarını ayırt edemez.

Uygun bir alet seçimi, deney tasarımının önemli bir parçasıdır. Hassasiyeti yetersiz bir alet büyük belirsizliklere yol açabilirken, gereğinden fazla hassas bir alet de kullanışsız veya zor olabilir. Bu nedenle, ölçüm ölçeğine ve ölçümün doğasına uygun bir alet seçmek güvenilir deneysel sonuçlar elde etmek için esastır.

Şekil 1'de gösterildiği gibi, metre çubuğu ölçeği eşit aralıklı işaretlerden oluşur. Her ana işaret 1 cm'lik bir uzunluğa karşılık gelirken, daha küçük ara işaretler 1 mm'lik alt bölmeleri temsil eder. Dolayısıyla en küçük işaretli bölme, ölçüm çözünürlüğünü belirler.



Figure 1: Uzunluk ölçümlerinde kullanılan metre çubuğu ölçeğinde ana (1 cm) ve ara (1 mm) bölmelerin gösterimi.

Ölçümlerde hassasiyet ile doğruluk (accuracy) arasındaki farkı ayırt etmek önemlidir. Hassasiyet, tekrarlanan ölçümlerin yeniden üretilebilirlik derecesini ifade eder ve büyük ölçüde ölçüm aletinin çözünürlüğü tarafından belirlenir. Şekil 1'deki metre çubuğu için en küçük ölçek bölümü, bir uzunluğun ne kadar hassas okunabileceğine sınır koyar.

Doğruluk ise ölçülen değerin büyüklüğün gerçek veya kabul edilen değerine ne kadar yakın olduğunu ifade eder. Alet doğru kalibre edilmemişse veya sistematik bir hata varsa, ölçüm hassas fakat doğru olmayabilir. Tersine, büyük rastgele değişimler nedeniyle düşük hassasiyet olsa bile ölçüm ortalama olarak doğru olabilir.

Hassasiyet ve doğruluk arasındaki fark basit laboratuvar örnekleriyle gösterilebilir. Bir metre çubuğu, 1 mm çözünürlükle tekrarlı uzunluk okumalarına izin vererek oldukça tutarlı ölçümler sağlayabilir. Ancak metre çubuğu sıcaklık değişimleri nedeniyle genişler veya büzülürse, tüm ölçümler sistematik olarak kayabilir; bu da hassas fakat doğru olmayan sonuçlara yol açar.

Benzer şekilde, dijital bir kronometre zaman aralıklarını 0.01 s çözünürlükle gösterebilir ve bu yüksek hassasiyet izlenimi verir. Buna rağmen, kronometreyi başlatıp durdururken insan reaksiyon süresinden kaynaklanan gecikmeler sistematik bir hata oluşturabilir ve tekrarlı ölçümler tutarlı görünse bile zaman aralığının doğruluğunu azaltabilir.

Bunun tersi de mümkündür: ölçüm doğru fakat hassas olmayabilir. Örneğin, kaliteli bir saat veya kol saati iyi kalibre edilmiş olup ortalama olarak doğru zamanı gösterebilir. Ancak saat kaba bir gösterime sahipse veya yalnızca büyük zaman adımlarıyla güncelleniyorsa, kısa zaman aralıklarını ince çözünürlükle ölçmeye izin vermez. Bu durumda, ölçülen zaman değerleri gerçek değere yakın (doğru) olabilir fakat küçük ölçeklerde yeniden üretilebilirlik zayıf olur (düşük hassasiyet).

2. Hatalar ve Belirsizlik

Tüm deneysel ölçümler belirsizliğe tabidir. Bu belirsizlik; ölçüm aletlerinin sınırlamalarından, çevresel koşullardan ve ölçüm yönteminin kendisinden kaynaklanır. Sonuç olarak, hiçbir ölçülen değer tam olarak kesin kabul edilemez. Ölçüm hatalarının doğasını ve deneysel sonuçları nasıl etkilediklerini anlamak, laboratuvar çalışmasının temel bir yönüdür.

Deneysel fizikte *hata* terimi, yanlış yapmak veya hatalı bir prosedür uygulamak anlamına gelmez. Bunun yerine, ölçülen bir değer için bir fiziksel büyüklüğün gerçek veya kabul edilen değerinden kaçınılmaz sapmasını ifade eder. İlişkili *belirsizlik* ise gerçek değer için hangi aralık içinde bulunmasının beklendiğine dair bir tahmin sağlar.

Ölçüm hataları genellikle iki ana sınıfa ayrılır: sistematik hatalar ve rastgele (istatistiksel) hatalar. Bu iki hata türü deneysel sonuçları farklı biçimlerde etkiler ve veri analizinde farklı şekillerde ele alınmalıdır.

2.1. Sistematik Hatalar

Sistematik hatalar, ölçümleri sürekli olarak aynı yönde etkileyen hatalardır. Genellikle aletin yanlış kalibrasyonu, çevresel etkiler veya deney düzeneğindeki kusurlar gibi etkenlerden kaynaklanırlar. Sistematik hatalar tutarlı bir yanlışlık oluşturduğundan, tekrarlanan ölçümler bunları ortadan kaldırmaz.

Sistematik hata örneklerini ölçüm aletleri tartışmasında görmüştük. Önceki bölümdeki metre çubuğu örneğinde (bkz. Şekil 1), ölçeğin termal genişmesi veya büzülmesi tüm uzunluk ölçümlerinin gerçek değerden sistematik olarak daha büyük veya daha küçük çıkmasına neden olabilir. Benzer şekilde, kronometre ölçümlerinde insan reaksiyon süresine bağlı tutarlı bir gecikme, tüm ölçülen zaman aralıklarını yaklaşık aynı miktarda kaydırabilir.

Bu tür etkiler tekrarlı ölçümlerin saçılmasını artırmaz; bunun yerine ölçülen değerleri gerçek veya kabul edilen değerden uzaklaştırır. Bu nedenle sistematik hatalar öncelikle bir ölçümün *doğruluğunu* etkiler.

2.2. Rastgele (İstatistiksel) Hatalar

Rastgele hatalar, ölçüm sürecindeki öngörülemez değişimlerden kaynaklanır. Bu değişimler; deney koşullarındaki dalgalanmalardan, insan algısının sınırlamalarından veya ölçüm aletlerindeki doğal gürültüden doğabilir. Sistematik hataların aksine, rastgele hatalar ölçümlerin bir ortalama değer etrafında saçılmasına neden olur.

Örneğin bir olayı kronometre ile tekrar tekrar zamanlamak, reaksiyon süresindeki değişimler nedeniyle biraz farklı sonuçlar verebilir. Rastgele hatalar ölçümlerin *hassasiyetini* etkiler ve ölçümlerin tekrarlanması ve uygun ortalama alma teknikleriyle azaltılabilir. Benzer koşullar altında bir ölçüm çok sayıda tekrarlandığında, bireysel sonuçlar merkezi bir değer etrafında kümelenme eğilimi gösterir ve bu ölçümlerin ortalaması, ölçülen büyüklüğün daha güvenilir bir tahminini sağlar.

2.3. Ölçümlerde Belirsizlik

Bir ölçümle ilişkili belirsizlik, o ölçümün güvenilirliğine dair nicel bir gösterge sağlar. Hem sistematik hem de rastgele hataların birleşik etkilerini yansıtır. Laboratuvar raporlarında ölçülen değerler her zaman ilişkili belirsizlikleri ile birlikte sunulmalıdır.

Belirsizliğin doğru tahmin edilmesi ve raporlanması, deney sonuçlarının kuramsal öngörülerle ve başkalarının elde ettiği sonuçlarla anlamlı biçimde karşılaştırılmasına olanak tanır. Bu laboratuvar dersinde, belirsizlik kaynaklarını anlamaya ve ölçümleri açık ve tutarlı bir biçimde raporlamaya vurgu yapılır.

Şekil 2'de gösterilen cetvel okumasında, işaretlenen konum 4.3 cm ile 4.4 cm işaretleri arasındadır ve gözle görülür biçimde 4.3 cm'e daha yakındır. Temel düzeyde tüm gözlemciler uzunluğun yaklaşık 4.3 cm olduğu konusunda hemfikir olmalıdır. Bu okumanın güvenli bir biçimde raporlanması

$$x = 4.3 \pm 0.1 \text{ cm},$$

şeklinde olabilir ve bu, aletin en küçük işaretli bölmesini yansıtır ve öznel ara değer tahmininden kaçınır.

Daha dikkatli bir gözlemlerle, en küçük ölçek bölmesi içinde konum tahmin edilebilir. Metre çubuğunun en küçük bölmesi 1 mm (0.1 cm) olduğundan, analog ölçekler için yaygın bir kural bu değer yaklaşık yarısı kadar belirsizlik atamaktır. Bu durumda önerilen ve daha hassas bir raporlama

$$x = 4.35 \pm 0.05 \text{ cm}.$$

şeklinde olabilir. Bu ifade, mevcut görsel bilgiyi kullanırken ölçüm aletinin çözünürlüğü ve insan gözleminin sınırlamalarıyla tutarlıdır. Lütfen her iki okumanın da belirsizlikleri dikkate alındığında birbiriyle tutarlı olduğunu unutmayın.

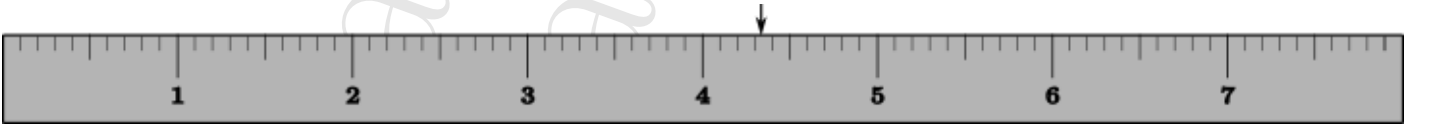


Figure 2: Okuma belirsizliğini gösteren bir uzunluk ölçümü örneği. Ok, iki komşu ölçek bölmesi arasındaki bir konumu işaret etmektedir.

Dijital ölçüm aletleri için ölçümlerin ve belirsizliklerin yorumlanması, biraz farklı fakat daha kısıtlayıcı bir kurala göre yapılır. Dijital bir alet ayrık sayısal değerler gösterir ve ekranda görülen en küçük değişim, aletin çözünürlüğünü temsil eder.

Bu laboratuvar dersinde, aksi belirtilmedikçe, dijital bir ölçümün belirsizliği aletin çözünürlüğüne eşit alınacaktır.

Örneğin, dijital bir kronometre zaman aralıklarını 0.01 s çözünürlükle gösteriyorsa, ölçülen bir zaman

$$t = 2.34 \pm 0.01 \text{ s.}$$

şeklinde rapor edilmelidir. Bu durumda, son gösterilen basamak zaten hassasiyet sınırını yansıtır ve gösterilen değerler arasında ek bir ara değer tahmini (interpolasyon) yapılmaz.

Analog ölçeklerin aksine, dijital aletler en küçük bölme içinde görsel tahmine izin vermez. Bu nedenle, ekran çözünürlüğünden daha küçük belirsizlikler raporlamak veya aletin göstermediği ekstra basamaklar eklemek kabul edilemez.

Mutlak belirsizliğe ek olarak, bir ölçümün belirsizliğini ölçülen değerin büyüklüğüne göre değerlendirmek de çoğu zaman yararlıdır. Bu, *kesirli belirsizlik* (fractional uncertainty) olarak adlandırılır. Boyutsuz bir ölçüdür ve farklı büyüklüklerin belirsizliklerini doğrudan karşılaştırmaya olanak tanır.

Kesirli belirsizlik, mutlak belirsizliğin ölçülen değere oranı olarak tanımlanır:

$$\text{kesirli belirsizlik} = \frac{\Delta x}{x},$$

burada x ölçülen değer, Δx ise mutlak belirsizliktir. Pay ve payda aynı birimlere sahip olduğundan, kesirli belirsizlik birimsizdir.

Örneğin,

$$x = 4.35 \pm 0.05 \text{ cm}$$

şeklinde raporlanan bir uzunluğun kesirli belirsizliği

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{0.05}{4.35} \approx 0.011$$

olur. Bu, belirsizliğin ölçülen değerin yaklaşık yüzde biri kadar olduğunu gösterir.

Kesirli belirsizlik, *bağlı belirsizlik* (relative uncertainty) ile yakından ilişkilidir; bağlı belirsizlik aynı büyüklüğün yüzde olarak ifade edilmesidir:

$$\text{bağlı belirsizlik} = \frac{\Delta x}{x} \times 100\%.$$

Yukarıdaki örnekte bağlı belirsizlik yaklaşık 1.1%'dir. Aynı ölçüm yüzde belirsizlik kullanılarak da ifade edilebilir. Örneğin,

$$x = 4.35 \pm 1.1\%$$

ifadesi, belirsizliğin ölçülen değerin 1.1%'i olduğu anlamına gelir.

Kesirli ve bağlı belirsizlikler, farklı büyüklükteki ölçümleri karşılaştırırken veya hesaplanan bir sonucun belirsizliğine hangi büyüklüğün daha çok katkıda bulunduğunu değerlendirirken özellikle kullanışlıdır. Genel olarak, daha küçük kesirli belirsizlik, büyüklüğün mutlak değerinden bağımsız olarak daha hassas bir ölçümü gösterir.

2.4. Anlamlı Rakamlar (Basamaklar)

Anlamlı rakamlar, ölçülen veya hesaplanan bir büyüklüğün hassasiyetini belirtmek için kullanılır. Ölçüm sürecine ve ilişkili belirsizliğe dayanarak bir sayının hangi basamaklarının güvenilir olduğunu yansıtır. Deneysel çalışmalarda, anlamlı rakamlar raporlanan sonuçların, ölçüm aletlerinin izin vermediği bir hassasiyet düzeyini ima etmemesini sağlayan pratik bir yöntemdir.

Ölçülen bir büyüklükte anlamlı basamaklar, kesin olarak bilinen tüm basamakları ve ilk belirsiz basamağı içerir. Dolayısıyla son anlamlı basamağın konumu, ölçüm belirsizliği tarafından belirlenir. Örneğin,

$$x = 4.35 \pm 0.05 \text{ cm,}$$

şeklinde raporlanan bir uzunlukta 4, 3 ve 5 basamakları anlamlıdır; bundan sonraki basamaklar sayılmaz.

Raporlanan bir değerde anlamlı basamak sayısını belirlemek için aşağıdaki genel kuralları kullanılır:

- Tüm sıfır olmayan basamaklar anlamlıdır.
- Sıfır olmayan basamaklar arasındaki sıfırlar anlamlıdır.

- Baştaki sıfırlar (ilk sıfır olmayan basamağın solundaki sıfırlar) anlamlı değildir.
- Sondaki sıfırlar yalnızca ondalık nokta açıkça belirtilmişse anlamlıdır.

Örnekler:

- 2.35 üç anlamlı basamağa sahiptir,
- 0.042 iki anlamlı basamağa sahiptir,
- 4.30 üç anlamlı basamağa sahiptir,
- 1200 aksi belirtilmedikçe iki anlamlı basamağa sahiptir.

Ölçülen büyüklükler kullanılarak yapılan hesaplamalarda sonuç uygun sayıda anlamlı basamakla rapor edilmelidir. Bu, giriş verilerinin hassasiyetiyle tutarlılığı sağlar.

Çarpma ve bölmede, sonuç en az anlamlı basamağa sahip giriş büyüklüğü kadar anlamlı basamak içermelidir. Örneğin,

$$2.5 \times 1.24 = 3.10 \rightarrow 3.1,$$

çünkü 2.5 yalnızca iki anlamlı basamağa sahiptir.

Toplama ve çıkarmada ise sonuç, en az hassas giriş değerinin ondalık basamağına göre rapor edilmelidir. Örneğin,

$$4.35 + 0.2 = 4.55 \rightarrow 4.6.$$

Bu laboratuvar dersinde, ölçülen bir büyüklük için raporlanan anlamlı basamak sayısı, belirtilen belirsizlikle tutarlı olmalıdır. Belirsizlik, raporlanan değer son anlamlı basamağının yerini belirler. Belirsizliğin izin verdiğinden daha fazla basamak raporlamak kabul edilemez; çünkü bu, gerçekte var olmayan bir hassasiyet düzeyini ima eder.

Bu laboratuvar dersi boyunca, raporlanan tüm ölçümler ve hesaplanan sonuçların anlamlı basamaklarla ilgili bu kurallara uyması beklenir. Ölçülen büyüklükleri içeren hesaplamalarda, anlamlı basamaklara göre yuvarlama *yalnızca nihai sonuçta* uygulanmalıdır. Ara hesaplama değerleri, ister elle ister hesap makinesiyle elde edilsin, yuvarlama hatalarının birikmesini önlemek için fazladan basamakla korunmalıdır. Ara sonuçların erken yuvarlanması, nihai sonuçların hatalı çıkmasına yol açabilir ve bundan kaçınılmalıdır.

Uzunluğu $L = 6.6$ m olan basit bir sarkaç ve $g = 9.81$ m/s² için periyot

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

ile verilir. L iki anlamlı basamağa sahip olduğundan, T için nihai sonuç iki anlamlı basamakla rapor edilmelidir.

Doğru yaklaşım izlenip tam hassasiyet korunursa,

$$T = 2\pi\sqrt{6.6/9.81} = 5.155 \dots \text{ s} \rightarrow 5.2 \text{ s}.$$

Ara oran anlamlı basamaklara göre erken yuvarlanırsa,

$$\frac{L}{g} = 0.67278 \dots \rightarrow 0.67,$$

o zaman

$$T = 2\pi\sqrt{0.67} = 5.141 \dots \text{ s} \rightarrow 5.1 \text{ s}.$$

Bu örnek, ara sonuçların- anlamlı basamak kurallarına göre yuvarlansa bile—nihai raporlanan değeri değiştirebileceğini gösterir. Bu nedenle, hesap makinesiyle elde edilen ara sonuçlar fazladan basamakla tutulmalı ve anlamlı basamak yuvarlaması yalnızca nihai raporlanan sonuca bir kez uygulanmalıdır.

3. Belirsizliğin Ötelenmesi (Yayılması)

Birçok laboratuvar deneyinde, ilgi duyulan büyüklük doğrudan ölçülmez; bunun yerine bir veya daha fazla ölçülen büyüklükten hesaplanır. Her ölçülen büyüklük bir belirsizlik taşıdığından, hesaplanan sonucun belirsizliği de giriş büyüklüklerinin belirsizliklerinden belirlenmelidir. Bu işleme *belirsizliğin ötelenmesi (yayılması)* (propagation of uncertainty) denir.

Bu bölümde sunulan belirsizlik yayılması kuralları şu varsayımlara dayanır:

- belirsizlikler ölçülen değerlere kıyasla küçüktür,
- ölçülen büyüklükler birbirinden bağımsızdır,
- belirsizlik değerinde rastgele hatalar baskındır.

Bu koşullar altında belirsizlikler standart analitik kurallar kullanılarak birleştirilebilir.

3.1. Genel Formül

Bir q büyüklüğü, birden fazla ölçülen büyüklükten $x_1, x_2, \dots, x_n$ aşağıdaki gibi hesaplanıyor olsun:

$$q = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

q ile ilişkili belirsizlik Δq şu şekilde verilir:

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \Delta x_n\right)^2}.$$

Bu ifade, deneysel fizikte kullanılan tüm belirsizlik yayılması kurallarının temelini oluşturur.

3.2. Toplama ve Çıkarma

Bir büyüklük, ölçülen değerlerin toplanması veya çıkarılmasıyla elde ediliyorsa,

$$q = a \pm b,$$

q 'nın mutlak belirsizliği

$$\Delta q = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}.$$

şeklindedir. Bu durumda belirsizlikler kesirli veya yüzde belirsizlik olarak değil, mutlak büyüklükler olarak birleştirilir.

3.3. Çarpma ve Bölme

Bir büyüklük, ölçülen değerlerin çarpılması veya bölünmesiyle elde ediliyorsa,

$$q = ab \quad \text{veya} \quad q = \frac{a}{b},$$

q 'nın kesirli belirsizliği

$$\frac{\Delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}.$$

şeklindedir. Mutlak belirsizlik Δq , bu kesirli belirsizliğin hesaplanan q değeriyle çarpılmasıyla elde edilir.

3.4. Üsler ve Üslerin Çarpımı

Bir büyüklük, ölçülen bir değerin bir kuvvetine bağlıysa,

$$q = a^n,$$

kesirli belirsizlik

$$\frac{\Delta q}{q} = |n| \frac{\Delta a}{a}.$$

olur.

Daha genel olarak,

$$q = a^\alpha b^\beta c^\gamma,$$

ise q 'nın kesirli belirsizliği

$$\frac{\Delta q}{q} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\beta \frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\Delta c}{c}\right)^2}.$$

şeklindedir.

3.5. Örnek: Basit Sarkaç

Basit bir sarkaç için yerçekimi ivmesi

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2},$$

bağıntısından belirlenir; burada L sarkaç uzunluğu ve T periyottur. Çarpım ve üs kuralları kullanılarak g 'nin kesirli belirsizliği

$$\frac{\Delta g}{g} = \sqrt{\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta T}{T}\right)^2}.$$

şeklinde bulunur. Mutlak belirsizlik Δg , bu ifadenin hesaplanan g değeriyle çarpılmasıyla elde edilir.

Bu örnek, ölçülen büyüklüklerdeki belirsizliklerin fiziksel formüller boyunca nasıl yayıldığı ve belirli ölçümlerin nihai belirsizliğe daha güçlü katkıda bulunabileceğini göstermektedir.

Nihai Sonucun Raporlanması

Hesaplanan nihai sonuç belirsizliği ile birlikte rapor edilmelidir:

$$q = q_{\text{calc}} \pm \Delta q,$$

burada belirsizlik bir anlamlı basamağa (veya baştaki basamak 1 ya da 2 ise iki anlamlı basamağa) yuvarlanmalıdır. Hesaplanan değer q_{calc} , belirsizlikle aynı ondalık basamağa yuvarlanmalıdır.

Belirsizlik yayılması, yuvarlanmamış ara değerler kullanılarak yapılmalıdır. Anlamlı basamaklara göre yuvarlama yalnızca nihai raporlanan sonuçta uygulanmalıdır.

3.6. Karekök ve Logaritmik Fonksiyonlar

Laboratuvar formüllerinde belirli matematiksel fonksiyonlar sıkça karşımıza çıkar. İki önemli durum karekök ve doğal logaritmadır. Bunların belirsizlikleri genel yayılma formülünden doğrudan elde edilebilir.

Karekök

Bir büyüklük q , ölçülen bir büyüklüğün karekökü ile veriliyorsa,

$$q = \sqrt{x},$$

o zaman q 'nın kesirli belirsizliği

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{x}.$$

şeklindedir. Eşdeğer olarak mutlak belirsizlik

$$\Delta q = \frac{1}{2} \frac{\Delta x}{x} q.$$

olur.

Bu sonuç, $\sqrt{x} = x^{1/2}$ olduğundan, üs kuralının özel bir durumudur. Karekök almanın bağıl belirsizliği iki kat azalttığını gösterir.

Doğal Logaritma

Bir büyüklük q , ölçülen bir büyüklüğün doğal logaritması ile veriliyorsa,

$$q = \ln x,$$

o zaman q 'nın mutlak belirsizliği

$$\Delta q = \frac{\Delta x}{x}.$$

şeklindedir.

Bu durumda $\ln x$ 'in belirsizliği yalnızca x 'in kesirli belirsizliğine bağlıdır. Doğal logaritma boyutsuz bir fonksiyon olduğundan, belirsizliği de boyutsuzdur.

Genel Logaritmalar

Tabanı b olan bir logaritma için,

$$q = \log_b x,$$

belirsizlik

$$\Delta q = \frac{1}{\ln b} \frac{\Delta x}{x}.$$

şeklindedir.

Açıklamalar

Bu sonuçlar, kesirli belirsizliğin önemini vurgular. Karekök ve logaritma gibi fonksiyonlar, yalnızca belirsizliğin mutlak büyüklüğüne değil, belirsizliğin ölçülen değere göre ne kadar büyük olduğuna bağlıdır. Dolayısıyla kesirli belirsizliği küçük olan büyüklükler, doğrusal olmayan fonksiyonlar içinde kullanıldığında daha güvenilir sonuçlar üretir.

Yayılma Formüllerinin Kullanımı Üzerine Bir Not

Bu bölümde sunulan toplama, çarpma, üs alma, karekök ve logaritma gibi özel belirsizlik yayılma kuralları bağımsız formüller değildir. Bunların tamamı, bu bölümün başında verilen genel belirsizlik yayılma formülünün doğrudan sonuçlarıdır.

Öğrenciler, her özel durumu genel formülden başlayarak ve gerekli kısmi türevleri açıkça hesaplayarak doğrulamaya teşvik edilir. Bu yaklaşım, belirsizlik yayılmasının ezberlenecek formüller bütünü değil, bir büyüklüğün ölçülen değişkenlere fonksiyonel bağımlılığına dayanan sistematik bir işlem olduğunu pekiştirir.

Standart durumlardan hiçbirine uymayan bir formülle karşılaşıldığında, genel belirsizlik yayılma formülü doğrudan kullanılmalıdır.

Değişkenlerin Bağımsızlığı Üzerine Önemli Varsayım

Bu laboratuvar dersi boyunca, tüm ölçülen büyüklüklerin birbirinden istatistiksel olarak bağımsız olduğu varsayılmaktadır. Bu varsayım altında, belirsizlikler bu bölümün başında verilen genel belirsizlik yayılma formülü ve buradan türetilen tüm özel yayılma kuralları kullanılarak birleştirilebilir.

Ölçülen büyüklükler bağımsız değilse—örneğin ölçüm prosedürü veya ortak sistematik etkiler nedeniyle korelasyon varsa—bu bölümde verilen yayılma formülleri mevcut halleriyle geçerli değildir ve korelasyon terimlerini içerecek şekilde değiştirilmelidir. Genel yayılma formülünün kendisi bağımsızlık varsayımı altında türetilindiğinden, burada sunulan tüm sonuçlar en baştan bu varsayıma dayanır.

Bu derste, korelasyonlu belirsizlikler ele alınmayacaktır. Bu nedenle, öğrenciler belirsizlik yayılma formüllerini uygulamadan önce birleştirilen büyüklüklerin makul biçimde bağımsız kabul edilebileceğini her zaman doğrulamalıdır.

4. Tekrarlı Ölçümler, Ortalama Değer ve İstatistiksel Belirsizlik

DeneySEL fizikte, tek bir ölçüm nadiren bir sonucun güvenilirliği hakkında tam bilgi sağlar. Aynı fiziksel büyüklük aynı koşullar altında tekrar tekrar ölçüldüğünde, ölçülen değerler genellikle birbirinden biraz farklı çıkar. Bu farklılıklar; küçük çevresel dalgalanmalar, insan algısının sınırlamaları ve ölçüm aletlerindeki içsel gürültü gibi tamamen ortadan kaldırılamayan rastgele etkilerden doğal olarak kaynaklanır. Dolayısıyla tekrarlı ölçümler, yalnızca fiziksel büyüklüğün değerine değil, aynı zamanda ilişkili belirsizliğin doğasına ve büyüklüğüne de ışık tutar.

Bir ölçüm çok sayıda tekrarlandığında, elde edilen değerler genellikle merkezi bir değer etrafında karakteristik çan şeklinde bir dağılım oluşturur. Bu tür bir dağılım *Gauss* veya *normal* dağılım olarak adlandırılır. Dağılımın ayrıntılı matematiksel biçimi burada gerekli değildir, ancak nitel özellikleri önemlidir:

- ölçülen değerlerin çoğu merkezi değere yakındır,
- merkezden büyük sapmalar daha seyrek görülür,
- dağılım yaklaşık olarak simetriktir.

Bu davranış Şekil 3’de şematik olarak gösterilmiştir. Yatay eksen öğrenci notlarını, dikey eksen ise belirli bir notu alan öğrenci sayısını temsil eder. Öğrencilerin çoğu ortalama not çevresinde kümelenirken, çok düşük ve çok yüksek notlar daha az görülür; bu da karakteristik çan eğrisini oluşturur.

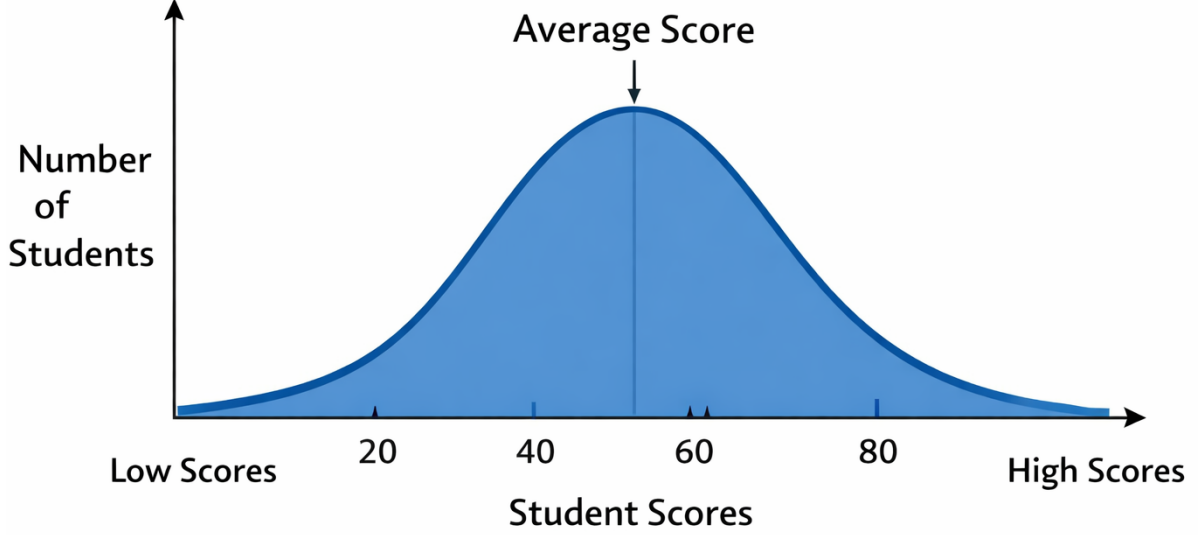


Figure 3: Öğrenci notlarının şematik çan şeklindeki (Gauss) dağılımı. Değerlerin çoğu ortalama not çevresinde kümelenirken, aşırı düşük ve yüksek değerler daha seyrek görülür. Benzer dağılımlar, rastgele etkiler nedeniyle tekrarlı deneysel ölçümlerde doğal olarak ortaya çıkar.

Bu davranış, her ölçümün çok sayıda küçük ve bağımsız rastgele etkiden etkilenmesi nedeniyle ortaya çıkar. *Merkezi limit teoremi* olarak bilinen temel bir istatistik ilkesine göre, bu tür bağımsız rastgele katkıların birleşik etkisi, tek tek etkilerin ayrıntılarından bağımsız olarak doğal biçimde Gauss dağılımına yol açar.

4.1. En İyi Tahmin Olarak Ortalama Değer

Bir fiziksel büyüklük x , N kez ölçülüp

$$x_1, x_2, \dots, x_N$$

değerleri elde edilsin. Ölçülen büyüklüğün en güvenilir tahmini *aritmetik ortalama* ile verilir:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Ortalama değer, ölçüm dağılımının merkezine karşılık gelir ve rastgele hataların baskın olduğu durumlarda büyüklüğün en iyi tahminini temsil eder. Ölçüm sayısı arttıkça, bireysel ölçümler dalgalanmaya devam etse bile ortalama değer giderek daha kararlı hale gelir.

4.2. Ölçümlerin Dağılımı ve Hassasiyet

Ortalama değer ölçümlerin merkezi eğilimini karakterize ederken, tek tek değerlerin ortalama etrafındaki yayılımı ölçüm sürecinin *hassasiyetini* yansıtır. Bu yayılım *standart sapma* ile nicelenir:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Standart sapma, tek tek ölçümlerin ortalamadan tipik sapmasını ölçer. Küçük bir standart sapma, yüksek hassasiyet ve iyi yeniden üretilebilirlik; büyük bir standart sapma ise belirgin rastgele değişkenlik anlamına gelir.

Tek tek ölçümler geniş biçimde saçılmış olsa bile, ortalama genellikle daha doğru belirlenir. Ortalama değerle ilişkili belirsizlik

$$\Delta\bar{x} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.$$

ile verilir. Bu büyüklük, rastgele hatalar nedeniyle tahmin edilen ortalamanın belirsizliğini temsil eder. Ölçüm sayısı arttıkça, ortalamanın belirsizliği azalır; bu da ortalama alma yoluyla elde edilen güvenilirliğin arttığını gösterir. Bu azalma merkezi limit teoreminin bir başka doğrudan sonucudur ve tekrarlı ölçümlerin deneysel fizikte neden güçlü bir araç olduğunu açıklar.

Aynı metre çubuğu kullanılarak bir uzunluğun beş kez ölçüldüğünü ve aşağıdaki sonuçların (santimetre cinsinden) elde edildiğini düşünelim:

$$4.34, 4.36, 4.35, 4.33, 4.37.$$

Ortalama değer

$$\bar{x} = 4.35 \text{ cm.}$$

olur. Ölçümlerin standart sapması

$$\sigma = 0.016 \text{ cm,}$$

ortalamanın belirsizliği ise

$$\Delta\bar{x} = \frac{0.016}{\sqrt{5}} \approx 0.007 \text{ cm.}$$

şeklindedir.

Bu laboratuvar dersinin kurallarına göre yuvarladıktan sonra sonuç

$$x = 4.35 \pm 0.01 \text{ cm.}$$

şeklinde rapor edilebilir.

4.3. En İyi Tahmin Olarak Ağırlıklı Ortalama

Tüm ölçümlerin belirsizliği aynı olduğunda aritmetik ortalama uygundur. Ancak birçok deneyde tek tek ölçümlerin belirsizlikleri farklı olabilir. Bu gibi durumlarda, belirsizliği daha küçük olan ölçümler nihai tahmine daha fazla katkıda bulunmalıdır.

Bir fiziksel büyüklük x 'in N kez ölçüldüğünü ve

$$x_1, x_2, \dots, x_N,$$

değerlerinin, bunlara karşılık gelen standart belirsizliklerin ise

$$\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$$

olduğunu varsayalım.

Farklı hassasiyetleri hesaba katmak için her ölçüme bir ağırlık atarız:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Belirsizliği daha küçük olan ölçümler daha büyük ağırlık alır.

Büyüklüğün en iyi tahmini *ağırlıklı ortalama* ile verilir:

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i}{\sum_{i=1}^N w_i}.$$

Tüm belirsizlikler eşitse, tüm ağırlıklar eşit olur ve ağırlıklı ortalama sıradan aritmetik ortalama indirgenir.

Ağırlıklı ortalamanın belirsizliği

$$\Delta\bar{x}_w = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i}}.$$

ile verilir.

Bu ifade, toplam ağırlık arttıkça genel hassasiyetin arttığını gösterir. Dolayısıyla belirsizliği daha küçük ölçümler, nihai belirsizliği daha etkili biçimde azaltır.

4.4. Örnek: Direnç Ölçümlerinin Ağırlıklı Ortalaması

Bir direncin, farklı aletler kullanılarak veya ayrı gerilim–akım ölçümlerinden $R = V/I$ hesaplanarak elde edilen üç bağımsız belirlenimden bulunduğunu ve aşağıdaki sonuçların alındığını varsayalım:

$$R_1 = 10.12 \pm 0.05 \, \Omega,$$

$$R_2 = 10.08 \pm 0.02 \, \Omega,$$

$$R_3 = 10.15 \pm 0.10 \, \Omega.$$

Adım 1: Ağırlıkları hesaplayın

$$w_1 = \frac{1}{(0.05)^2} = 400, \quad w_2 = \frac{1}{(0.02)^2} = 2500, \quad w_3 = \frac{1}{(0.10)^2} = 100.$$

Adım 2: Ağırlıklı ortalamayı hesaplayın

$$\bar{R}_w = \frac{400(10.12) + 2500(10.08) + 100(10.15)}{400 + 2500 + 100}.$$

$$\bar{R}_w = \frac{4048 + 25200 + 1015}{3000} = 10.09 \, \Omega.$$

Adım 3: Ağırlıklı ortalamanın belirsizliğini hesaplayın

$$\Delta \bar{R}_w = \sqrt{\frac{1}{400 + 2500 + 100}} = \sqrt{\frac{1}{3000}} = 0.018 \, \Omega.$$

Laboratuvar kurallarına göre yuvarladıktan sonra nihai sonuç

$$R = 10.09 \pm 0.02 \, \Omega.$$

şeklinde rapor edilir.

Bu örnek, belirsizliği daha küçük ölçümlerin nihai tahmine daha güçlü katkıda bulunduğunu ve genel belirsizliği azalttığını göstermektedir.

Sınırlamalar ve Pratik Notlar

Tekrarlı ölçümlerden elde edilen istatistiksel belirsizlik yalnızca rastgele hataların etkilerini yansıtır. Aletin yanlış kalibrasyonu veya tutarlı deneysel yanlışlık gibi sistematik hatalar, tekrarlı ölçümlerin saçılmasından anlaşılmaz ve ortalama alma ile azaltılmaz.

Bu laboratuvar dersinde öğrenciler mümkün olduğunda tekrarlı ölçümler yapmalı, sonuçların dağılımını incelemeli ve **ortalama değeri** uygun bir belirsizlikle birlikte **rapor** etmelidir; ancak sistematik etkilerin getirdiği sınırlamaların farkında olmalıdır.

5. Verilerin Gösterimi ve Grafikler

Deneysel fiziğin temel amaçlarından biri, fiziksel büyüklükler arasındaki ilişkileri sınamaktır. Birçok fizik yasası, bir büyüklüğün diğerine basit ve belirli bir biçimde bağlı olduğunu öngörür; örneğin doğru orantı, kuvvet yasası veya üstel bağımlılık. Bu tür ilişkileri incelemenin etkili bir yolu, deneysel verilerin grafiksel gösterimidir.

Grafikler, deney sonuçlarının kuramsal beklentilerle karşılaştırılması için açık bir görsel yöntem sağlar. Sayısal tablolardan fark edilmesi zor olabilen örüntüler, veriler çizildiğinde çoğu zaman hemen ortaya çıkar. Bu nedenle grafikler, ölçümlerin analizi ve yorumlanmasında temel bir rol oynar.

Bir fizik yasası bir büyüklük y 'nin başka bir büyüklük x ile doğru orantılı olduğunu öngörüyorsa, ilişki

$$y \propto x.$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda, y 'nin (düşey eksen) x 'e (yatay eksen) karşı grafiği orijinden geçen bir doğru vermelidir. Doğrular görsel olarak kolay tanındığından, bu durum doğru orantıyı test etmek için basit ve etkili bir yöntem sunar.

Uygulamada, ölçüm belirsizlikleri nedeniyle deneysel veri noktaları nadiren mükemmel bir doğru üzerinde tam olarak yer alır. Temel soru şudur: Gözlenen doğrusal olmayan sapmalar, makul biçimde ölçüm belirsizliklerine bağlanabilir mi, yoksa varsayılan fiziksel ilişkinin geçersizliğine mi işaret eder?

Daha önce tartıştığımız gibi, ölçülen büyüklükler her zaman belirsizlik taşır ve grafikler yorumlanırken bu dikkate alınmalıdır. Her bir nokta, kesin bir değeri değil, ölçüm belirsizliği ile uyumlu olası değer aralığını temsil eder. Bu aralıklar grafik üzerinde hata çubukları ile gösterilebilir.

Tüm fiziksel ilişkiler doğrusal değildir. Birçok durumda, bir büyüklük diğerine bir kuvvet yasasıyla veya üstel bir fonksiyonla bağlıdır. Bu tür verileri doğrudan çizmek eğri bir grafik üretebilir ve görsel değerlendirmeyi zorlaştırabilir.

Yaygın ve güçlü bir teknik, değişkenleri dönüştürerek beklenen ilişkiyi doğrusal hale getirmektir. Örneğin:

- Eğer y , x 'in bir kuvveti ile orantılıysa, y 'yi x 'in uygun bir kuvvetine karşı çizmek doğru verebilir.
- Eğer y , x 'e üstel olarak bağlıysa, y 'nin doğal logaritmasını x 'e karşı çizmek doğru vermelidir.

Bu tür doğrusallaştırma teknikleri, doğrusal olmayan ilişkilerin de doğrusal olanlarla aynı basit grafik yöntemleriyle analiz edilmesini sağlar. Bu laboratuvar dersinde öğrenciler, uygun olduğunda verileri grafikte göstermeye, belirsizlikleri grafiklere dahil etmeye ve grafikleri fiziksel ilişkilerin geçerliliğini değerlendirmede birincil araç olarak kullanmaya teşvik edilir.

Aşağıdaki örnekler, laboratuvar deneylerinde grafiklerin fiziksel büyüklükler arasındaki ilişkileri incelemek için nasıl kullanıldığını göstermektedir. Bir örnek, ölçülen verilerin doğrudan çizildiği ve bir doğru eğilim ile karşılaştırıldığı *doğrusal bir ilişkiyi* göstermektedir. İkinci örnek ise *doğrusal olmayan bir ilişkiyi* göstermekte, bu ilişki uygun değişken seçimiyle önce doğrusal bir forma dönüştürülmektedir.

Her iki durumda da deneysel belirsizlikler dikkate alınır ve grafiksel analiz bu aşamada nitel bir araç olarak kullanılır. Daha nicel bir yaklaşım olan en küçük kareler yöntemi, dersin ilerleyen kısımlarında tanıtılacaktır.

5.1. Örnek: Bir Grafikte Doğrusal Bir Yasanın Testi (Ohm Yasası)

Bu laboratuvar dersindeki birçok deney, iki büyüklüğün doğrusal bir yasa ile ilişkili olup olmadığını test etmek üzere tasarlanmıştır. Basit ve önemli bir örnek *Ohm yasasıdır*; bu yasa bir iletken üzerindeki potansiyel farkın V , iletkenin geçen akım I ile orantılı olduğunu söyler:

$$V = RI,$$

burada R , iletkenin (sabit) direncidir. Ohm yasası geçerliyse, V 'nin (düşey eksen) I 'ye (yatay eksen) karşı grafiği orijinden geçen bir doğru olmalıdır ve doğrunun eğimi direnç R 'yi verir.

Bu yöntemi göstermek için, bir direnç üzerindeki gerilimi farklı akım değerleri için ölçtüğümüzü varsayalım. Basitlik adına, akım değerlerinin çok doğru bilindiğini (belirsizliğinin gerilim belirsizliğine göre ihmal edilebilir olduğunu) ve her gerilim okumasının ± 0.02 V belirsizliğe sahip olduğunu varsayalım. Olası bir veri seti Tablo 4'da verilmiştir.

Table 4: V ile I arasındaki doğrusal ilişkiyi incelemek için kullanılan akım ve gerilim ölçümleri. Akımdaki belirsizlik ihmal edilebilirken, tüm gerilim ölçümlerinin belirsizliği ± 0.20 V'tur.

Akım I (A)	Gerilim V (V)	V belirsizliği (V)
0.10	0.94	± 0.20
0.20	2.08	± 0.20
0.30	2.87	± 0.20
0.40	4.15	± 0.20
0.50	4.92	± 0.20
0.60	6.18	± 0.20
0.70	6.82	± 0.20
0.80	8.11	± 0.20

Tablo 4'daki değerler Şekil 4'te çizilmiştir. I 'deki belirsizlik ihmal edilebilir olduğundan, her nokta yalnızca *düşey* hata çubuğu ile gösterilmiştir. Örneğin, ilk ölçüm $(I, V) = (0.10 \text{ A}, 0.94 \text{ V})$ yaklaşık olarak $0.94 \pm 0.02 \text{ V}$ aralığında bir gerilimi temsil eder; dolayısıyla grafikteki nokta $I = 0.10 \text{ A}$ konumundaki düşey parça üzerinde bir yerde bulunur.

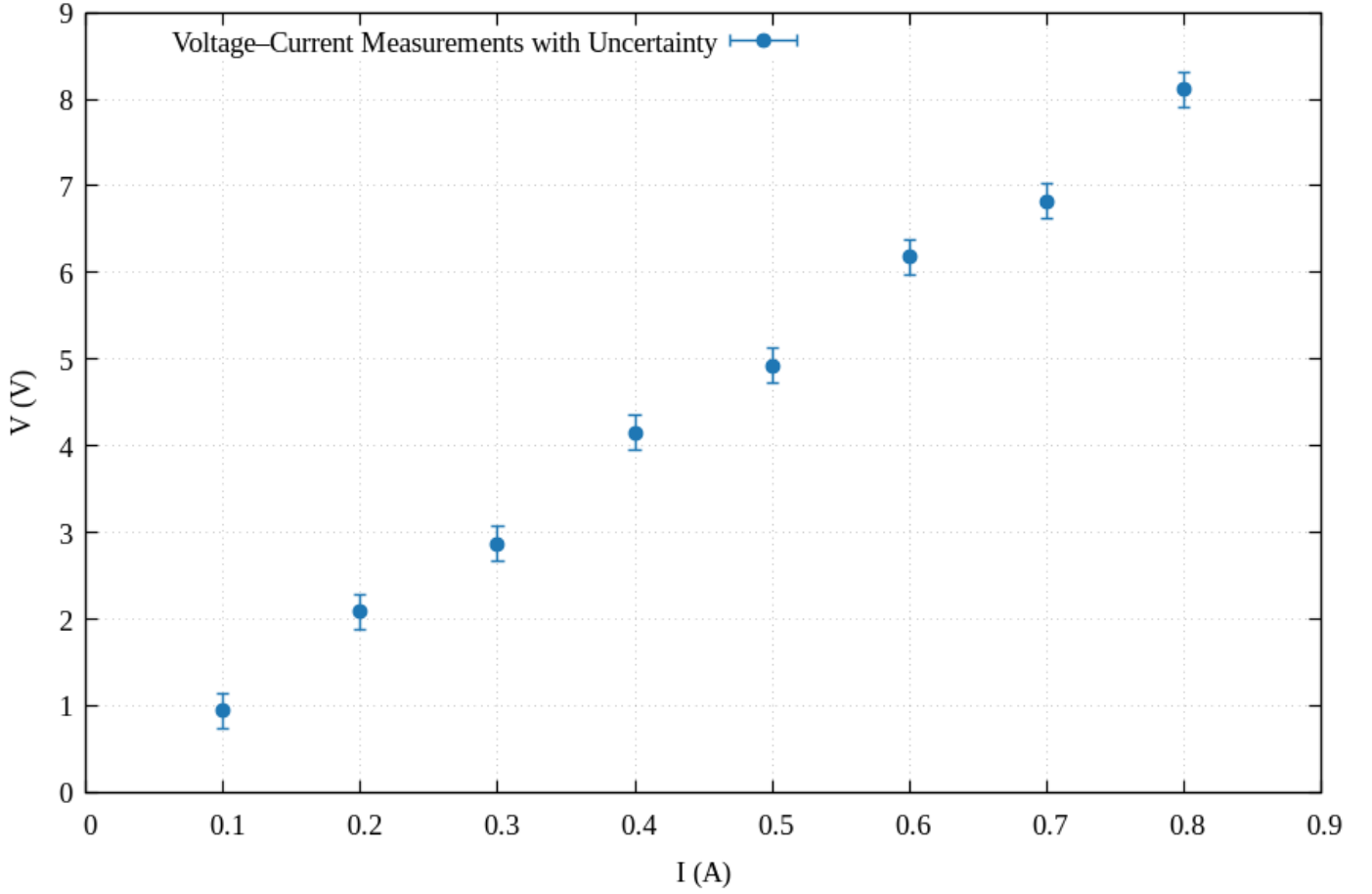


Figure 4: Tablo 4 verileri kullanılarak gerilim V 'nin akım I 'ye karşı grafiği. Yalnızca V -değerlerinin belirgin belirsizliği olduğundan düşey hata çubukları gösterilmiştir. Hata çubuklarıyla uyumlu biçimde orijinden geçen bir doğru, Ohm yasasını destekler ve eğimi direnç R 'yi verir.

Beklenen fiziksel ilişkiyle tutarlı bir doğru, veri noktalarının çoğunun hata çubuklarının içinden geçiyor veya onlara makul biçimde yakın geçiyorsa, veriler önerilen ilişkiyle tutarlı kabul edilebilir. Buna karşılık, veriler belirsizlik aralıklarının ötesinde sistematik biçimde beklenen eğilimden sapıyorsa, bu durum deneysel hatalara, yanlış varsayımlara veya fiziksel modelin geçersizliğine işaret eder.

Grafikler yalnızca ilişkileri test etmek için değil, aynı zamanda fiziksel sabitleri belirlemek için de kullanılıştır. Doğrusal bir ilişki beklendiğinde, en iyi fit (uyum) doğrusunun eğimi çoğu zaman doğrudan ilgili fiziksel parametreye karşılık gelir. Ayrıca, deneysel belirsizliklerle uyumlu kalan eğim aralığı tahmin edilerek, belirlenen parametrenin belirsizliği de kestirilebilir.

Ohm yasası, test edilen aralıkta direnç için geçerliyse, orijinden geçen ve çoğu düşey hata çubuğunun içinden geçen veya makul biçimde yakın geçen bir doğru çizilebilir. Bu en iyi fit doğrusunun eğimi direnç R 'yi verir. Eğer orijinden geçen bir doğru, birçok hata çubuğunu hata çubuğu uzunluğu kadar (veya daha fazla) sistematik biçimde kaçırıyorsa, veriler basit bir orantı $V \propto I$ ile tutarlı değildir; ölçüm prosedürü, belirsizlik tahminleri veya fiziksel varsayımlar yeniden gözden geçirilmelidir.

5.2. Örnek: Basit Sarkacın Doğrusallaştırılması

Laboratuvarıda karşılaşılan doğrusal olmayan bir ilişkiye yaygın bir örnek basit sarkacın periyodudur. Küçük salınım genlikleri için, uzunluğu L olan bir sarkacın periyodu T şu şekilde verilir:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

burada g yerçekimi ivmesidir. Bu denklem, T 'nin L ile doğrusal olarak değil, L 'nin karekökü ile orantılı olduğunu gösterir.

Verilerin karekök bağımlılığına uyup uymadığını görsel olarak değerlendirmek zor olduğundan, ilişkiyi doğrusal bir forma dönüştürmek avantajlıdır. Her iki tarafın karesi alınırsa

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L.$$

elde edilir. Bu, T^2 ile L arasında doğrusal bir ilişki öngörür. Dolayısıyla, T^2 'nin (düşey eksen) L 'ye (yatay eksen) karşı grafiği, deneysel belirsizlikler içinde orijinden geçen bir doğru vermelidir.

Sarkacın periyodu T 'nin çeşitli uzunluklar L için ölçüldüğünü varsayalım. Her uzunluk için ölçülen periyot ve belirsizliği ΔT kaydedilir. Grafik T^2 kullandığından, her ölçüm için T^2 hesaplanmalı ve belirsizlik yayılması kullanılarak $\Delta(T^2)$ belirlenmelidir.

Olası bir ölçüm kümesi Tablo 5'da verilmiştir. Bu örnekte uzunluktaki belirsizliğin zamanlamadaki belirsizliğe göre ihmal edilebilir olduğu varsayılmıştır; bu nedenle grafikte yalnızca düşey belirsizlik çubukları kullanılacaktır. Bu örnekte periyot T , belirsizliği tüm ölçümler için $\Delta T = 0.05$ s olan bir kronometre ile ölçülmüştür.

Table 5: Doğrusallaştırılmış sarkaç ilişkisi için örnek veriler. Ölçülen büyüklükler sarkaç uzunluğu L ve periyot T 'dir. Tüm periyot ölçümlerinin belirsizliği $\Delta T = 0.05$ s'dir. Çizilen büyüklük T^2 'dir ve bunun belirsizliği $\Delta(T^2) = 2T\Delta T$ ile elde edilir. L 'deki belirsizlik ihmal edilmiştir.

Uzunluk L (m)	Periyot T (s)	T^2 (s ²)	$\Delta(T^2)$ (s ²)
0.30	1.10	1.210	0.110
0.40	1.29	1.664	0.129
0.50	1.42	2.016	0.142
0.60	1.55	2.403	0.155
0.70	1.67	2.789	0.167
0.80	1.80	3.240	0.180
0.90	1.90	3.610	0.190
1.00	2.02	4.080	0.202

Çizilen büyüklük T^2 olduğundan, T 'deki belirsizlik yayılmalıdır. Daha önce tartışılan genel belirsizlik yayılması ilkeleri kullanılarak,

$$y = T^2,$$

için y 'nin belirsizliği

$$\Delta(T^2) = 2T \Delta T.$$

şeklinde. Böylece grafikteki her nokta, verilen L için ölçülen T^2 değerini ve uzunluğu $\pm\Delta(T^2)$ olan bir düşey belirsizlik çubuğunu temsil eder.

Tablo 5'da listelenen veriler, Şekil 5'te T^2 'nin L 'ye karşı grafiği olarak çizilmiştir ve düşey hata çubukları yayılmış belirsizliği $\Delta(T^2)$ göstermektedir. Dolayısıyla her nokta tek bir kesin değeri değil, zamanlama belirsizliği ile uyumlu değer aralığını temsil eder.

Düşey hata çubuklarının büyüklüğünün periyot T arttıkça ve dolayısıyla T^2 arttıkça büyüdüğünü belirtmek de önemlidir. Bu davranış tesadüfi değildir; belirsizlik yayılmasının doğrudan bir sonucudur. Çizilen büyüklüğün belirsizliği $\Delta(T^2) = 2T \Delta T$ olduğundan, sabit bir zamanlama belirsizliği ΔT , daha uzun periyotlar için T^2 'de daha büyük belirsizliklere yol açar.

Bu sistematik artış Şekil 5'te açıkça görülür ve ölçüm belirsizliklerinin doğrusal olmayan dönüşümler boyunca nasıl yayıldığına somut bir örnek sunar.

Şekil 5'te gösterildiği gibi, veri noktaları ve ilişkili belirsizlik çubukları, T^2 ile L arasındaki doğrusal ilişkiyle genel olarak uyumludur. Bu görsel uyum, küçük salınım genlikleri için sarkaç periyodunun uzunluğa bağımlılığına ilişkin öngörülen bağımlılığı destekler. Bu aşamada grafik yalnızca belirsizlikleri dikkate alan nitel bir değerlendirme için kullanılır; eğimin ve eğim belirsizliğinin nicel belirlenmesi, en küçük kareler yöntemi tanıtıldıktan sonra yapılacaktır.

Doğrunun eğimi

$$\text{eğim} = \frac{4\pi^2}{g},$$

olduğundan, eğimin ölçülmesi g 'nin belirlenmesini sağlar. Bu dersin bu aşamasında, belirsizlikler göz önünde bulunduru-

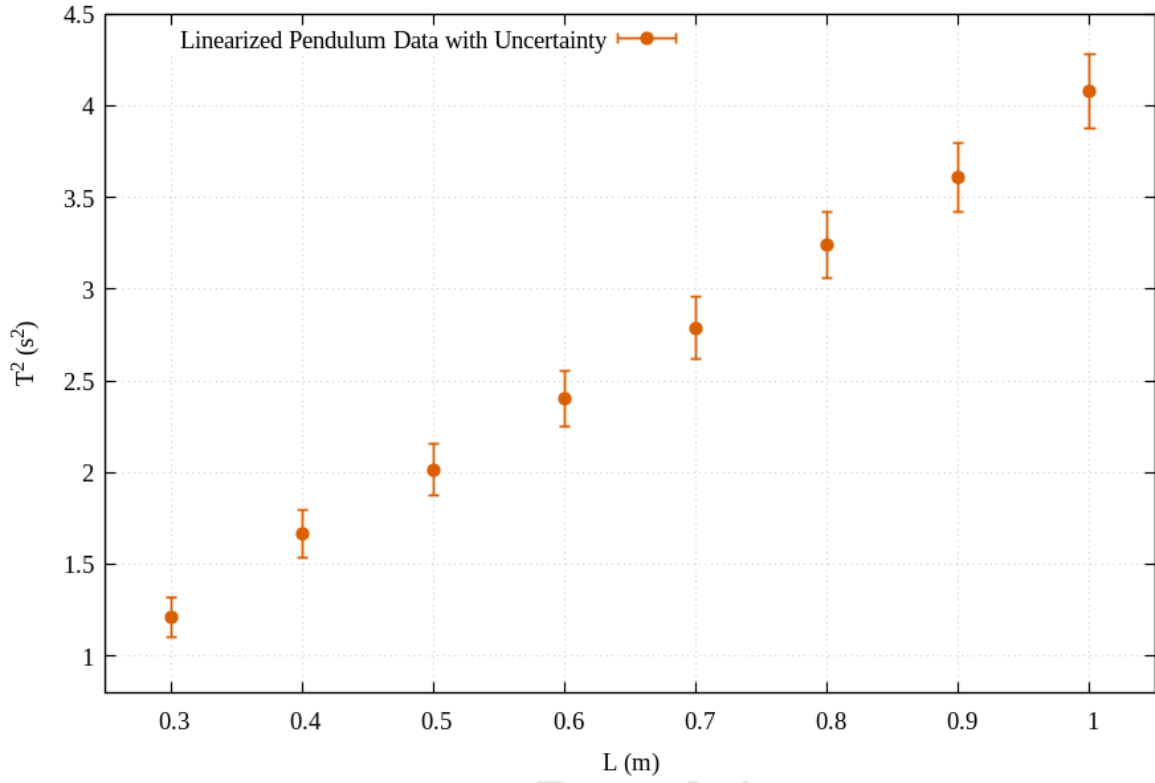


Figure 5: Tablo 5 verileri kullanılarak T^2 'nin sarkaç uzunluğu L 'ye karşı grafiği. Düşey hata çubukları, T^2 'deki yayılmış belirsizliği temsil eder.

olarak doğru görsel inceleme ile değerlendirilir. En iyi fit doğrusunun ve eğim belirsizliğinin sistematik olarak belirlenmesi, en küçük kareler yöntemi tanımlandıktan sonra gerçekleştirilecektir.

6. Milimetrik Kağıtta Grafik Çizimi

Milimetrik kağıtta elle grafik çizmek, temel bir deneysel beceridir. Öğrencilerin sayısal verilerin, belirsizliklerin ve fiziksel ilişkilerin geometrik olarak nasıl temsil edildiğini anlamalarına yardımcı olur. Bu bölümde, milimetrik kağıtta grafik çizme prosedürü şematik örnekler kullanılarak adım adım açıklanmıştır.

6.1. Milimetrik Kağıt ve Ölçek

Milimetrik kağıt, eşit aralıklı karelerden oluşur. Tipik olarak her beşinci kare daha koyu bir çizgi ile işaretlenir ve daha büyük bir kare oluşturur. Bu büyük kareler, eksenlerin sayısal ölçeğini tanımlamak için kullanılır.

Herhangi bir veri noktası çizilmeden önce, her eksen için bir ölçek seçilmelidir. Ölçek, fiziksel büyüklüklerin kağıt üzerindeki uzaklıklara nasıl eşleneceğini belirler. Her büyük kare genellikle her yönde beş küçük kareye bölünmüştür. Küçük kareler, ana ölçek işaretleri arasındaki ara değerlerin doğru biçimde yerleştirilmesini sağlar. Ölçek seçildikten sonra, grafiğin tamamında tutarlı biçimde kullanılmalıdır.

Örneğin bir öğrenci şu şekilde karar verebilir:

- yatay ekseninde bir büyük kare 0.10 m'yi temsil etsin, o halde bir küçük kare 0.02 m'yi temsil eder,
- düşey ekseninde bir büyük kare 0.50 s²'yi temsil etsin, o halde bir küçük kare 0.10 s²'yi temsil eder.

6.2. Bir Veri Noktasının Yerleştirilmesi

Ölçek sabitlendikten sonra sayısal değerler, milimetrik kağıt üzerindeki konumlara dönüştürülebilir. Bu işlem iki eşdeğer yolla yapılabilir. İlk yöntemde, veri noktasının sayısal değeri bir küçük karenin temsil ettiği değere bölünür; böylece orijinden itibaren kaç küçük kare sayılacağı doğrudan bulunur. Alternatif olarak, büyük ve küçük ızgara çizgileri kullanılarak görsel inceleme ile konum belirlenebilir; pratik kazandıkça bu yöntem genellikle daha hızlı ve kullanışlıdır.



Figure 6: Ana ve ara kareleri gösteren milimetrik kağıt tarzı ızgara. Sayısal ölçek büyük kareler kullanılarak tanımlanır.

Bir ölçümün

$$x = 0.35, \quad y = 1.40.$$

değerlerini verdiğini varsayalım. Şekil 7'deki ölçek kullanılarak öğrenci şu şekilde ilerler:

- $x = 0.35$, görsel inceleme ile 3.5 büyük kareye; eşdeğer olarak $0.35/0.02$ hesabından elde edilen 17.5 küçük kareye karşılık gelir ve yatay eksen boyunca sayılır;
- $y = 1.40$, görsel inceleme ile ya da $1.40/0.10$ hesabından 14 küçük kareye karşılık gelir ve düşey eksen boyunca sayılır.

Veri noktası, milimetrik kağıt üzerinde bu iki konumun kesişimine yerleştirilir.

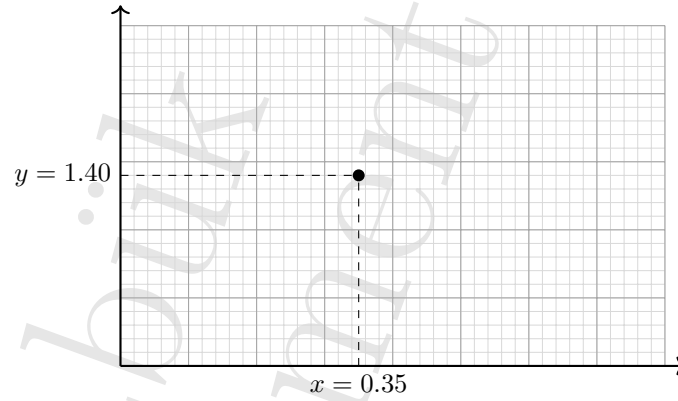


Figure 7: Seçilen ölçek kullanılarak bir veri noktasının yerleştirilmesi. Kesikli kılavuz çizgiler doğru konumu bulmaya yardımcı olur.

Pratikte öğrenciler ölçekleri okumak, kare saymak, noktaları doğru yerleştirmek için kendi verimli ve güvenilir yöntemlerini geliştirecek ve elle grafik çizmek deneysel çalışmanın doğal ve sezgisel bir parçası haline gelecektir. Öğrenciler, deneyimle hem doğruluk hem de güven hızla arttığından, düzenli olarak grafik çizme pratiği yapmaya teşvik edilir.

Bir ölçüm bir belirsizlik içeriyorsa, bu bir hata çubuğu ile gösterilmelidir. Hata çubuğu, ölçülen büyüklüğün gerçek değerinin bulunmasının beklendiği aralığı gösterir.

Örneğin düşey eksenindeki büyüklüğün belirsizliği ± 0.20 ise, bu düşey ekseninde 2 küçük kareye (görsel inceleme ile) karşılık gelir. Hata çubuğunun yarı uzunluğu 2 küçük karedir. Bu nedenle hata çubuğu, çizilen noktanın iki küçük kare üstüne ve iki küçük kare altına simetrik biçimde, eksenle aynı ölçek kullanılarak çizilir.

6.3. Genel Notlar

Milimetrik kağıtta grafik çizerken:

- noktaları çizmeden önce basit ve düzgün (eşit aralıklı) ölçekler seçin,

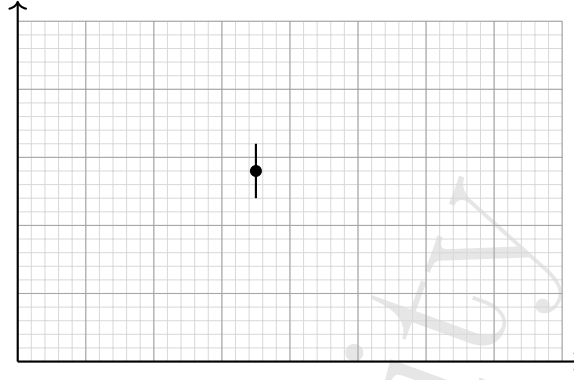


Figure 8: Eksenle aynı ölçek kullanılarak çizilmiş düşey hata çubuğuna sahip bir veri noktası.

- sayısal değerleri uzaklıklara doğru dönüştürmek için ızgarayı kullanın,
- noktaları beklenen bir eğilime uydurmak için kaydırmadan dikkatle yerleştirin,
- hata çubuklarını ilgili eksenle aynı ölçeği kullanarak çizin.

İyi çizilmiş bir grafik; verileri, ölçeği ve belirsizlikleri açıkça göstermeli ve ham veri tablosuna dönmeye gerek kalmadan deney sonuçlarının yorumlanmasına olanak tanımalıdır.

7. En Küçük Kareler Yöntemi ve Fit Parametrelerin Belirsizliği

Önceki bölümlerde veriler milimetrik kağıda çizildi ve görsel olarak incelendi. Görsel inceleme, verilerin bir doğruyla tutarlı olup olmadığını değerlendirmemizi sağlasa da eğim ve kesişimin nicel ve nesnel olarak belirlenmesini sağlamaz.

En uygun doğruyu ve bunun ilişkili belirsizliğini belirlemek için en küçük kareler yöntemini kullanırız.

Doğrusal bir ilişki varsayalım:

$$y = mx + b,$$

ve N adet ölçüm noktası (x_i, y_i) elde ettiğimizi düşünelim. Her y_i değeri, düşey hata çubuğu ile gösterilen bir belirsizliğe σ_i sahiptir.

Belirsizlikler biliniyorsa, minimize edilmesi gereken uygun büyüklük

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - (mx_i + b)]^2}{\sigma_i^2}.$$

olarak tanımlanır. Ağırlıkları

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

olarak tanımlayalım.

Ortak bir büyüklüğü

$$\Delta = (\sum w_i)(\sum w_i x_i^2) - (\sum w_i x_i)^2.$$

olarak tanımlayalım.

Buna göre fit yapılan (uydurulan) eğim ve kesişim

$$m = \frac{(\sum w_i)(\sum w_i x_i y_i) - (\sum w_i x_i)(\sum w_i y_i)}{\Delta},$$

$$b = \frac{(\sum w_i x_i^2)(\sum w_i y_i) - (\sum w_i x_i)(\sum w_i x_i y_i)}{\Delta}.$$

ile verilir.

Fit parametrelerin belirsizlikleri

$$\Delta m = \sqrt{\frac{\sum w_i}{\Delta}}, \quad \Delta b = \sqrt{\frac{\sum w_i x_i^2}{\Delta}}.$$

şeklinde dir.

Tüm belirsizlikler eşitse, tüm ağırlıklar eşittir. Bu durumda m ve b 'yi hesaplamak için $w_i = 1$ alınabilir. (Parametre belirsizlikleri yine de bilinen ortak belirsizlik kullanılarak fiziksel birimler cinsinden ifade edilmelidir; aşağıdaki Ohm yasası örneğine bakınız.)

Örnek: Ohm Yasası (Ağırlıksız Uydurma; Eşit Belirsizlikler)

Bu deneyde

$$x = I, \quad y = V,$$

alıyoruz ve tüm gerilim ölçümlerinin *aynı* belirsizliğe sahip olduğunu varsayıyoruz:

$$\sigma_V = \sigma \quad (\text{tüm noktalar için sabit}).$$

Tüm σ_i 'ler eşit olduğunda ağırlıklar $w_i = 1/\sigma_i^2$ de eşittir. Bu durumda ortak çarpan w , fit parametreleri m ve b ifadelerinde *sadeleşir*; dolayısıyla en iyi fit (uyum) doğrusu sıradan (ağırlıksız) toplamlar kullanılarak bulunabilir. Ancak aynı çarpan, parametre belirsizliklerinde *sadeleşmez*; bunun yerine ortak belirsizlik σ olarak dışarı çıkar. Daha sonra, ağırlıklı formüllerle bağlantı kurmak için $w = 1/\sigma^2$ açıkça yazılabilir.

Table 6: Ohm yasası verileri ve en küçük kareler toplamaları için gerekli ortak terimler. Burada $x = I$ ve $y = V$ 'dir.

I (A)	V (V)	I^2 (A ²)	IV (AV)
0.10	0.94	0.010	0.094
0.20	2.08	0.040	0.416
0.30	2.87	0.090	0.861
0.40	4.15	0.160	1.660
0.50	4.92	0.250	2.460
0.60	6.18	0.360	3.708
0.70	6.82	0.490	4.774
0.80	8.11	0.640	6.488
$\sum I = 3.600$	$\sum V = 36.07$	$\sum I^2 = 2.040$	$\sum IV = 20.461$

Ortak paydayı (çoğunlukla Δ olarak yazılır) tanımlayalım:

$$\Delta = N \sum I^2 - (\sum I)^2.$$

$N = 8$ için,

$$\Delta = 8(2.040) - (3.600)^2 = 3.36.$$

En iyi fit parametreleri (ağırlıksız). Eğim ve kesişim

$$m = \frac{N \sum IV - (\sum I)(\sum V)}{\Delta} = \frac{8(20.461) - (3.600)(36.07)}{3.36} = 10.07,$$

$$b = \frac{(\sum I^2)(\sum V) - (\sum I)(\sum IV)}{\Delta} = \frac{(2.040)(36.07) - (3.600)(20.461)}{3.36} = -0.0229.$$

şeklindedir. Dolayısıyla en iyi fit doğrusu

$$V = mI + b = (10.07)I - 0.023.$$

olur.

Fit parametrelerin belirsizlikleri (eşit σ). Tüm y_i değerleri aynı standart belirsizliğe σ sahipse, parametre belirsizlikleri

$$\sigma_m = \sigma \sqrt{\frac{N}{\Delta}}, \quad \sigma_b = \sigma \sqrt{\frac{\sum I^2}{\Delta}}.$$

şeklindedir. $\sigma = \sigma_V = 0.20$ V kullanılırsa,

$$\sigma_m = 0.20 \sqrt{\frac{8}{3.36}} = 0.31 \, \Omega, \quad \sigma_b = 0.20 \sqrt{\frac{2.040}{3.36}} = 0.16 \, \text{V}.$$

Nihai raporlanan sonuç.

$$V = (10.07 \pm 0.31) \Omega \cdot I + (-0.02 \pm 0.16) \text{ V},$$

ve direnç

$$R = (10.07 \pm 0.31) \Omega.$$

şeklindedir.

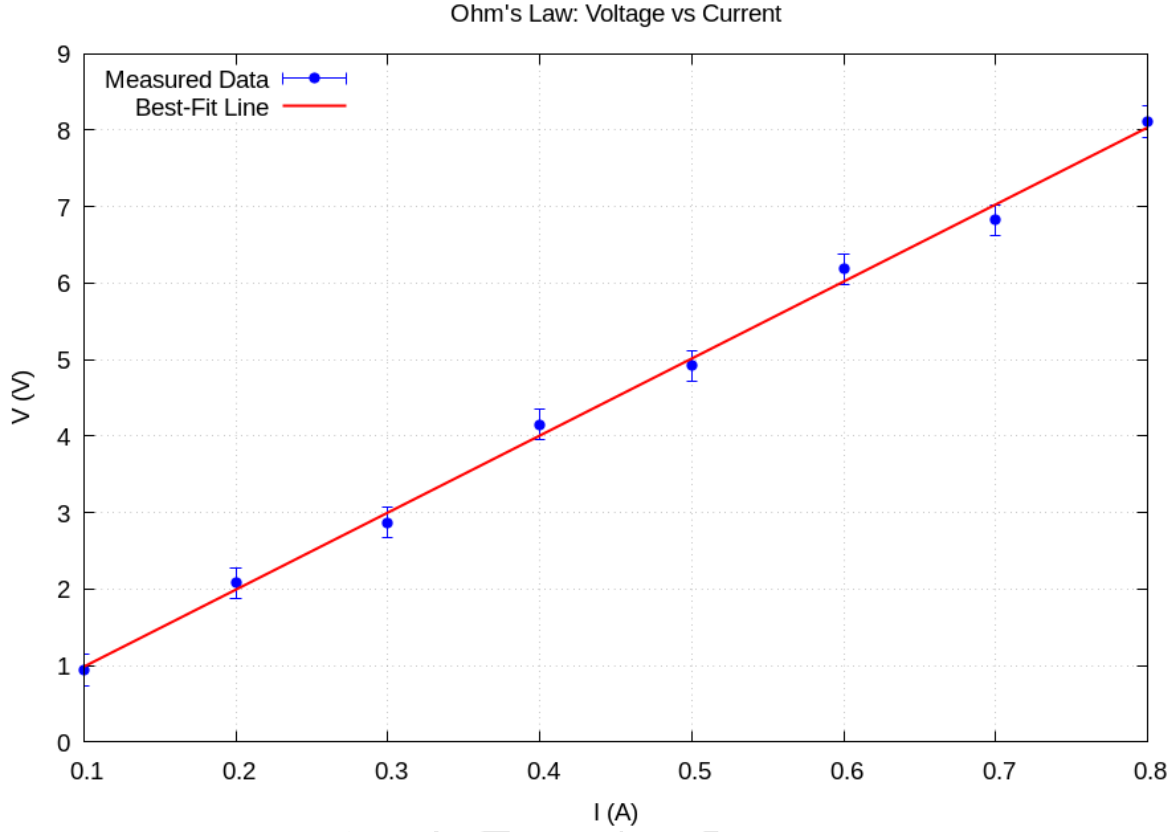


Figure 9: Ohm yasası deneyi için gerilim V 'nin akım I 'ye karşı grafiği. Mavi noktalar, düşey hata çubuklarıyla ($\Delta V = 0.20 \text{ V}$) ölçülen verileri temsil eder. Kırmızı doğru, en küçük kareler analiziyle elde edilen en iyi fit doğrusunu göstermektedir.

Şekil 9, ölçülen verileri ve uydurulan doğruyu birlikte göstermektedir. Kesişimin (b) belirsizliğine göre küçük olması, verilerin deneysel hassasiyet içinde doğrudan orantı ile tutarlı olduğunu doğrular.

Örnek: Doğrusallaştırılmış Sarkaç (Eşit Olmayan Belirsizlikler; Ağırlıklı Uydurma)

Doğrusallaştırma:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L.$$
$$x = L, \quad y = T^2, \quad \Delta T = 0.05 \text{ s}.$$

alalım. Çizilen belirsizlik yayılma ile elde edilir:

$$\Delta(T^2) = 2T \Delta T.$$

$\Delta(T^2)$ her noktada farklı olduğundan, ağırlıklı en küçük kareler kullanılmalıdır:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2} = \frac{1}{[\Delta(T^2)_i]^2}.$$

Table 7: Sarkaç doğrusallaştırma verileri ve ortak ağırlıklı terimler. Burada $x = L$, $y = T^2$, $\sigma_i = \Delta(T^2)$ ve $w_i = 1/\sigma_i^2$.

L (m)	T (s)	T^2 (s ²)	$\Delta(T^2)$ (s ²)	w	wL	wT^2	wL^2	wLT^2
0.30	1.10	1.210	0.110	82.645	24.793	100.000	7.438	30.000
0.40	1.29	1.664	0.129	60.093	24.037	99.994	9.615	39.998
0.50	1.42	2.016	0.142	49.593	24.797	99.980	12.398	49.990
0.60	1.55	2.403	0.155	41.623	24.974	100.021	14.984	60.012
0.70	1.67	2.789	0.167	35.856	25.100	100.004	17.570	70.003
0.80	1.80	3.240	0.180	30.864	24.691	100.000	19.753	80.000
0.90	1.90	3.610	0.190	27.701	24.931	100.000	22.438	90.000
1.00	2.02	4.080	0.202	24.507	24.507	99.990	24.507	99.990
Σ				352.883	197.830	799.989	128.703	519.993

Tablo 7'daki toplamalar kullanılarak:

$$\Delta = (\sum w)(\sum wL^2) - (\sum wL)^2 = (352.883)(128.703) - (197.830)^2 = 6280.45.$$

Buradan,

$$m = \frac{(\sum w)(\sum wLT^2) - (\sum wL)(\sum wT^2)}{\Delta} = 4.018,$$

$$b = \frac{(\sum wL^2)(\sum wT^2) - (\sum wL)(\sum wLT^2)}{\Delta} = 0.0145.$$

Parametre belirsizlikleri

$$\Delta m = \sqrt{\frac{\sum w}{\Delta}} = 0.237, \quad \Delta b = \sqrt{\frac{\sum wL^2}{\Delta}} = 0.143.$$

Dolayısıyla,

$$T^2 = (4.02 \pm 0.24) L + (0.01 \pm 0.14).$$

Kurama göre,

$$m = \frac{4\pi^2}{g} \implies g = \frac{4\pi^2}{m}.$$

Belirsizliği m 'den yayarsak,

$$\Delta g = \left| \frac{dg}{dm} \right| \Delta m = \frac{4\pi^2}{m^2} \Delta m = g \frac{\Delta m}{m}.$$

Sayısal olarak,

$$g = 9.83 \text{ m/s}^2, \quad \Delta g = 0.58 \text{ m/s}^2,$$

dolayısıyla

$$g = (9.8 \pm 0.6) \text{ m/s}^2.$$

Şekil 10, sarkaç ilişkisinin doğrusallaştırılmasını göstermektedir. T^2 'deki belirsizlikler T ile arttığından, veri noktalarının hepsi eşit ağırlığa sahip değildir. Bu nedenle ağırlıklı en küçük kareler yöntemi, yayılmış belirsizliği daha küçük olan ölçümlerin eğimin belirlenmesine daha güçlü katkıda bulunmasını sağlar.

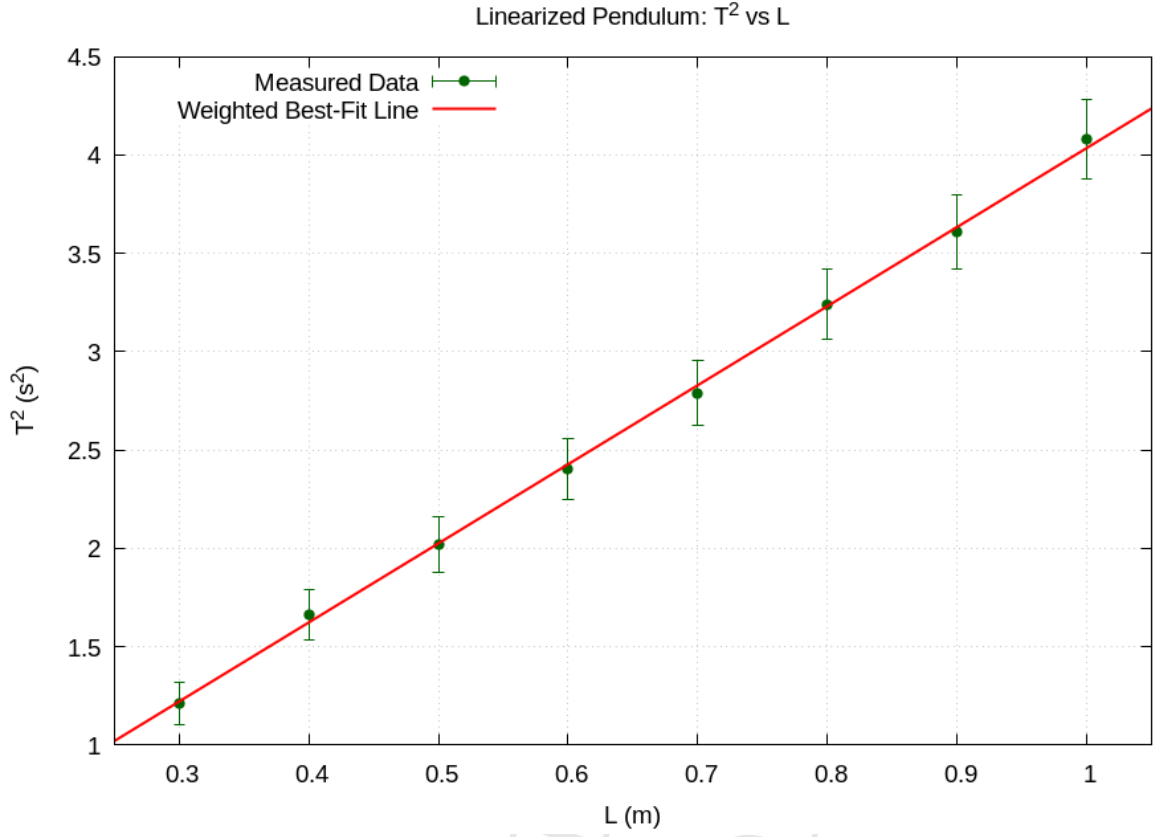


Figure 10: Doğrusallaştırılmış sarkaç verileri: T^2 'nin L 'ye karşı grafiği. Düşey hata çubukları, yayılmış belirsizlikleri $\Delta(T^2) = 2T\Delta T$ temsil eder. Kırmızı doğru, ağırlıklı en küçük kareler fit doğrusunu göstermektedir.

Teşekkür

Bu laboratuvar kılavuzunun bazı bölümleri, OpenAI tarafından geliştirilen büyük bir dil modeli olan ChatGPT'nin desteğiyle hazırlanmıştır. Yapay zekâ aracı, taslak hazırlama desteği, dil iyileştirmesi ve yapısal öneriler için kullanılmıştır. Tüm bilimsel içerik, türetimler ve nihai editoryal kararlar yazarlar tarafından gözden geçirilmiş ve onaylanmıştır.

Kaynakça

- Bevington, P. R., & Robinson, D. K. (2003). *Data reduction and error analysis for the physical sciences* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- International Organization for Standardization. (2008). *Evaluation of measurement data—Guide to the expression of uncertainty in measurement* (JCGM 100:2008). BIPM.
- Montgomery, D. C., & Runger, G. C. (2014). *Applied statistics and probability for engineers* (6th ed.). Wiley.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P. (2007). *Numerical recipes: The art of scientific computing* (3rd ed.). Cambridge University Press.
- Taylor, J. R. (1997). *An introduction to error analysis: The study of uncertainties in physical measurements* (2nd ed.). University Science Books.
- Young, H. D., & Freedman, R. A. (2016). *University physics with modern physics* (14th ed.). Pearson.